Corrigé

En utilisant le repère fourni $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, les points notés ont pour coordonnées : A(6 ; 0 ; 2), B(6 ; 0 ; 0), C(6 ; 8 ; 0), D(0 ; 8 ; 0), E(0 ; 0 ; 4), F(6 ; 0 ; 4), G(6 ; 8 ; 4), H(0 ; 8 ; 4), (6 ; 0 ; 2), R(6 ; 3 ; 4), T(3 ; 0 ; 4) et $S\left(3 ; \frac{5}{2} ; 0\right)$

1. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$.

$AR = \|\overrightarrow{AR}\| = \sqrt{0^2+3^2+2^2} = \sqrt{13}$ et $AT = \|\overrightarrow{AT}\| = \sqrt{(-3)^2+0^2+2^2} = \sqrt{13}$

$\|\overrightarrow{AR}\| = \|\overrightarrow{AR}\|$ donc le triangle ART est isocèle en A.

b. $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AR} = 0\times(-3)+3\times 0+2\times 2 = 4$

c. Utilisons la formule du produit scalaire : $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AR} = \left\|\overrightarrow{AR}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AT}\right\| \times \cos\left(\widehat{RAT}\right)$

donc $\cos\left(\widehat{RAT}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AR}}{\|\overrightarrow{AR}\| \times \|\overrightarrow{AT}\|} = \dfrac{4}{\sqrt{13}^2} = \dfrac{4}{13}$ donc $\widehat{RAT} = \arccos\left(\dfrac{4}{13}\right) \approx 72,1°$

2. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{JK} = k\times\overrightarrow{JL}$.

En effet le système $\begin{cases} 0 &= k\times(-3)\\ 3 &= k\times 0\\ 2 &= k\times 2\end{cases}$ n'admet pas de solution. Donc ils définissent une base du plan (ART). Calculons :

$\vec{n}.\overrightarrow{AR} = 2\times 0+(-2)\times 3+3\times 2 = -6+6 = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AT} = 2\times(-3)+(-2)\times 0+3\times 2 = -6+6 = 0$.

Donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AR}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AT}$ donc $\vec{n}$ est normal à tout vecteur du plan (ART), donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ART).

b. Le plan (ART) a pour équation cartésienne : $ax+by+cz+d = 0$, où $(a ; b ; c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur $\vec{n}$, on obtient : (ART) : $2x-2y+3z+d = 0$.

Or $A \in$ (ART) donc $12-0+6+d = 0$ donc $d = -18$.

Donc (ART) a pour équation $2x-2y+3z-18 = 0$.

3. **a.** La droite Δ est orthogonale au plan (ART), donc elle admet comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$, vecteur normal à ce plan. Elle passe par le point $S\left(3 ; \frac{5}{2} ; 0\right)$. Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$\begin{cases} x &= 3+2k\\ y &= \frac{5}{2}-2k\\ z &= 0+3k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$ soit $\begin{cases} x &= 3+2k\\ y &= \frac{5}{2}-2k\\ z &= 3k\end{cases}$, avec $k\in\mathbb{R}$.

b. Les coordonnées du point L sont les uniques solutions du système :

$(S)\begin{cases} x = 3+2k\\ y = \frac{5}{2}-2k\\ z = 3k\\ 2x-2y+3z-18 = 0\end{cases}$ En remplaçant x, y et z dans la dernière équation, on obtient :

$$2x-2y+3z-18=0 \iff 2(3+2k)-2\left(\frac{5}{2}-2k\right)+3\times 3k-18=0 \iff 17k-17=0 \iff k=1$$

Donc $x=3+2k=5$, $y=\frac{5}{2}-2k=\frac{1}{2}$ et $z=3k=3$. Le point L a pour coordonnées $\left(5\,;\,\frac{1}{2}\,;\,3\right)$.

4. Le milieu K de [EH] a donc pour coordonnées $(0\,;\,4\,;\,4)$. N a pour coordonnées $(0\,;\,8-4t\,;\,4t)$.

Pour $t\in[0\,;\,1]$, les vecteurs $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{ND}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}0\\-4\text{t}\\4\text{t}\end{pmatrix}$.

On remarque alors que $\overrightarrow{DN}=t\times\overrightarrow{DK}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires, donc les points D, K et N sont alignés.

Pour vérifier que N est un point du segment [DK], montrons que $\overrightarrow{NK}.\overrightarrow{ND}\leqslant 0$:

$\overrightarrow{NK}\begin{pmatrix}0\\-4+4\text{t}\\4-4\text{t}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ND}\begin{pmatrix}0\\4\text{t}\\-4\text{t}\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{NK}.\overrightarrow{ND}=0\times 0+(-4+4t)\times 4t+(4-4t)\times(-4t)=32t^2-32t=32t(t-1)$.

$t\in[0\,;\,1]$ donc $32t(t-1)\leqslant 0$ donc N est un point du segment [DK].

5. Les vecteurs $\overrightarrow{SL}$ et $\overrightarrow{SN}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SN}\begin{pmatrix}-3\\\frac{11}{2}-4t\\4t\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{SL}$ et $\overrightarrow{SN}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{SL}.\overrightarrow{SN}=0$.

$\overrightarrow{SL}.\overrightarrow{SN}=0 \iff 2\times(-3)+(-2)\times\left(\frac{11}{2}-4t\right)+3\times 4t=0 \iff 20t-17=0 \iff t=\frac{17}{20}$. Le point N aura alors pour coordonnées : $\text{N}\left(0\,;\,8-4\times\frac{17}{20}\,;\,4\times\frac{17}{20}\right)$ soit $\text{N}\left(0\,;\,\frac{23}{5}\,;\,\frac{17}{5}\right)$

Les bonnes réponses sont **b. c. a. b.**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x-2y+3z+5=0$ et donc, par propriété, il a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&-2+t+2t'\\y&=&0-t-2t'\\z&=&-1-t+3t'\end{array}\right.$

Par propriété, le plan (S) passe par F$(-2\,;\,0\,;\,-1)$ et a pour vecteurs de base $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&-2+t\\y&=&-t\\z&=&-1-t\end{array}\right.$

Par propriété, la droite (D) passe par F$(-2\,;\,0\,;\,-1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, elle est donc clairement contenue dans le plan (S) pour la valeur $t'=0$.

On donne les points de l'espace M$(-1\,;\,2\,;\,3)$ et N$(1\,;\,-2\,;\,9)$.

1. La bonne réponse est **b.** en excluant les trois autres ou en vérifiant directement.

   a. N'est pas un plan mais une droite.

   c. $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&t+t'\\y&=&1-t-2t'\\z&=&1-t-3t'\end{array}\right.$ passe par $(0;1;1)\notin$ (P).

   d. $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&1+2t+t'\\y&=&1-2t+2t'\\z&=&-1-t'\end{array}\right.$ passe par $(1;1;-1)\notin$(P)

   b. $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&t+2t'\\y&=&1-t+t'\\z&=&-1-t\end{array}\right.$ passe par le point A$(0;1;-1)$ qui est élément de (P) car $0-2+3\times(-1)+5=0$

   et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}=0$ donc $\overrightarrow{n}$ normal à deux vecteurs non colinéaires du plan est normal au plan. On a bien une représentation paramétrique du plan (P).
2. La bonne réponse est **c.** « La droite (D) est une droite du plan (P). »

   Remplaçons, pour t quelconque, les coordonnées d'un point de la droite dans l'équation du plan (P). Quel que soit $t\in\mathbb{R}$, $-2-t-2\times(-t)+3\times(-1-t)+5=-2-3+5+t+2t-3t=0$, donc tout point de Δ appartient à (P), la droite est contenue dans (P).
3. La bonne réponse est **a.** « La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales. »

   $\overrightarrow{\text{MN}}\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

   donc $\overrightarrow{\text{MN}}\cdot\overrightarrow{u}=1+2-3=0$ prouve que (MN) est orthogonale à (D).

4. La bonne réponse est **b.** « La droite (Δ) et la droite d'intersection de (P) et (S). »

   On vérifie que la droite Δ est contenue dans chacun des deux plans (qui ne sont pas confondus par ailleurs).

   . Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t - 2 \times (-2 - t) + 3 \times (-3 - t) + 5 = t + 4 + 2t - 9 - 3t + 5 = 0$ prouve $(\Delta) \subset (P)$.

   . Soit E le point de Δ de paramètre $t = 0$: E$(0\ ;\ -2\ ;\ -3)$ et soit F le point de paramètre $t = -2$: F$(-2\ ;\ 0\ ;\ -1)$. On reconnaît le point de (S) de paramètre $(t = 0,\ t' = 0)$ donc F $\in$ (S).
   Montrons que E $\in$ (S).
   Résolvons le système $\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & -2 + t + 2t' \\ -2 & = & -t - 2t' \\ -3 & = & -1 - t + 3t' \end{array}\right.$

   En additionnant les lignes (1) et (3) on obtient $5t' = 0$ donc $t' = 0$ et en remplaçant dans les trois équations on obtient bien une seule valeur de $t = 2$.
   Cela prouve que E $\in$ (P) pour $(t = 2,\ t' = 0)$.
   Conclusion : les points E et F sont dans (S), donc la droite (Δ) est entièrement contenue dans (S).

   La droite (Δ) étant simultanément contenue dans les deux plans (non confondus) est la droite d'intersection.

(*Remarque* : Les réponses **a.** et **c.** pouvaient être éliminées de manière directe, mais la réponse **b.** exclut aussi la réponse **d.**).